В.А. Зорич

Действительные (вещественные) числа

Число в математике, как время в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам. [1]

Универсал математического естествознания Анри Пуанкаре писал: "Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число. Непрерывность была внушена нам внешним миром. Она, без сомнения изобретена нами, но изобрести ее нас вынудил внешний мир...

Математика должна помогать философу углубляться в понятия числа, пространства и времени."

Так далеко наши намерения здесь не простираются, но телескоп мы все же постараемся направить куда надо.

Здание современной математики уже велико. Его логическая связность и устойчивость требуют систематического укрепления фундамента. В фундаменте же лежат такие "понятные"объекты как число, пространство и время.

Математические теории, как правило, находят свой выход в том, что позволяют перерабатывать один набор чисел (исходные данные) в другой набор чисел, составляющий промежуточную или окончательную цель вычислений. По этой причине особое место в математике и ее приложениях занимают числовые функции. Они (точнее, так называемые дифференцируемые числовые функции) составляют главный объект исследования классического анализа. Но сколь-нибудь полное с точки зрения современной математики описание свойств этих функций, как вы уже могли почувствовать в школе и в чем вскоре убедитесь, невозможно без точного определения множества вещественных чисел, на котором эти функции действуют.

[1] Когда учишься, непонятное проясняется, а понятное — наоборот. Зато становится ясно, что же в понятном неясно.

Кстати, об относительности понятного. Кто-то из приезжих математиков в беседе с А.Н.Колмогоровым стал ему рассказывать вещи, про которые Андрей Николаевич сказал, что он эту область не занает. Послушав, Колмогоров заметил: "Ваше «знаю»и мое «не знаю», оказывается совсем разные вещи."

Здесь мы имеем в виду лишь свести воедино то, что читателю в основном известно о действительных числах из средней школы, выделив в виде аксиом фундаментальные и независимые свойства чисел. При этом наша цель состоит в том, чтобы дать точное, пригодное для последующего математического использования определение вещественных чисел и обратить особое внимание на их свойство полноты, или непрерывности. Эта непрерывность связывает отдельные действительные числа, как время события. В ней зародыш предельного перехода — основной неарифметической операции анализа.

Закончив с определением, мы докажем несколько простых, но весьма важных фактов, относящихся к свойствам действительных чисел. Мы назовем их основными леммами, поскольку они постоянно используются как подручный инструмент во многих последующих конструкциях и доказательствах анализа.

Тут все будет ясно. Познакомившись с этими сведениями, или даже минуя первую главу, можно перейти к следующей главе, посвященной пределу.

О том, что же в понятии числа еще может быть неясного, немного скажет заключительный комментарий. Не специалисту его можно пропустить, чтобы, случайно не разобравшись, не отказаться войти в современный дом только из опасения, что время от времени дом будут ремонтировать, обновлять, достраивать и даже перестраивать. На жизнь, и не на одну, дома хватит! Входите, включайте свет, осваивайтесь, пользуйтесь, живите.

1. Определение множества действительных чисел

Множество $\mathbb{R}$ называется множеством *действительных* (*вещественных*) *чисел*, а его элементы *действительными* (*вещественными*) *числами*, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел.

На множестве $\mathbb{R}$ имеются операции сложения $(+)$, умножения $(\bullet)$, а также отношение порядка $(\leq)$.

а) **Операция** $(+)$ сопоставляет каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x+y \in \mathbb{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

1_+. Существует нейтральный элемент 0 (называемый в случае сложения нулем), такой, что $x + 0 = 0 + x = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

2_+. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый противоположным к x, такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

3_+. Операция ассоциативна, т.е. $x + (y + z) = (x + y) + z$ для любых элементов x, y, z из $\mathbb{R}$.

4_+. Операция коммутативна, т.е. $x + y = y + x$ для любых элементов x, y из $\mathbb{R}$.

(Если на каком-то множестве G определена операция, удовлетворяющая аксиомам 1_+, 2_+, 3_+, то говорят, что на G задана структура группы или что G есть *группа*. Если операцию называют сложением, то группу называют *аддитивной*. Если, кроме того, известно, что операция коммутативна, т.е. выполнено условие 4_+, то группу называют *коммутативной* или *абелевой*.[2])

Итак, аксиомы 1_+ - 4_+ говорят, что $\mathbb{R}$ есть аддитивная абелева группа.

b) **Операция** ($\bullet$) сопоставляет каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый произведением x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

$1_\bullet$. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$ (т.е. $1 \neq 0$), называемый в случае умножения единицей, такой что $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

$2_\bullet$. Для любого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ (т.е. при $x \neq 0$) имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый обратным, такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

$3_\bullet$. Операция ассоциативна, т.е. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для любых x, y, z из $\mathbb{R}$.

$4_\bullet$. Операция коммутативна, т.е. $x \cdot y = y \cdot x$ для любых x, y из $\mathbb{R}$.

(Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R} \setminus 0$, как можно проверить, является мультипликативной группой.)

c) **Связь сложения и умножения** выражается распределительным законом (дистрибутивностью) умножения по отношению к сложению: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(Отметим, что ввиду коммутативности умножения последнее равенство сохранится, если в обеих его частях поменять порядок множителей.

Если на каком-то множестве G действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным аксиомам, то G называется алгебраическим полем или просто *полем*.)

d) **Отношение** ($\leq$) **порядка** в $\mathbb{R}$ называется отношением *неравенства*. Для элементов x, y из $\mathbb{R}$ установлено, выполняется ли

---

[2] Н. Х. Абель (1802 - 1829) — замечательный норвежский математик, доказавший неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений, степени выше четвертой.

$x \leq y$ или нет. При этом должны удовлетворяться следующие условия:

$0_{\leq}$. $x \leq x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

$1_{\leq}$. $x \leq y$ и $y \leq x$ влечет $x = y$.

$2_{\leq}$. $x \leq y$ и $y \leq z$ влечет $x \leq z$.

$3_{\leq}$. Для любых x и y из $\mathbb{R}$ выполнено $x \leq y$ или $y \leq x$.

(Напомним еще, что знак строгого неравенства, точнее, запись $x < y$ используется, когда $x \leq y$ и известно, что $x \neq y$.

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение, удовлетворяющее аксиомам $0_{\leq}$, $1_{\leq}$, $2_{\leq}$, как известно, называют частично упорядоченным. - Вспомните отношение включения множеств. А если, сверх того, выполнена аксиома $3_{\leq}$, т.е. любые два элемента множества сравнимы, то множество называется *линейно упорядоченным.* - Вспомните числовую прямую.

Таким образом, множество действительных чисел линейно упорядочено отношением неравенства между его элементами.)

e) **Связь сложения и порядка** в $\mathbb{R}$ состоит в том, что $x \leq y$ влечет $x + z \leq y + z$ для любых x, y, z из $\mathbb{R}$.

f) **Связь умножения и порядка** в $\mathbb{R}$ состоит в том, что если $0 \leq x$ и $0 \leq y$, то и $0 \leq x \cdot y$.

(Все, что было выписано выше совершенно ясно для каждого, кто уже складывал, умножал, решал уравнения и неравенства. Появилась лишь какая-то формализация и попутно какие-то математические термины, про которые обещают, что они будут полезны. Всем этим аксиомам удовлетворяют уже рациональные числа. Их множество обычно обозначают через $\mathbb{Q}$. Мы знаем, что в множестве действительных чисел есть еще иррациональные числа, например, $\sqrt{2}$ (диагональ квадрата несоизмерима со стороной).

Добавление еще одной аксиомы завершает дело.)

g) **Аксиома полноты или непрерывности** множества вещественных чисел состоит в следующем.

Если X и Y — непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leq c \leq y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Этим завершается список аксиом, выполнение которых на каком бы то ни было множестве $\mathbb{R}$ позволяет считать это множество конкретной реализацией или, как говорят, *моделью действительных чисел.*

2. Обсуждение.

Это определение формально не предполагает никакой предварительной информации о числах, и из него, «включив математическую мысль», опять-таки формально мы должны получить уже в качестве теорем остальные свойства действительных чисел. По поводу этого аксиоматического формализма хотелось бы сделать несколько неформальных замечаний.

Представьте себе, что вы не прошли стадию от складывания яблок, кубиков или других именованных величин к сложению абстрактных натуральных чисел; что вы не занимались измерением отрезков и не пришли к рациональным числам; что вам неизвестно великое открытие древних о том, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и потому ее длина не может быть рациональным числом, т.е. нужны иррациональные числа; что у вас нет возникающего в процессе измерений понятия «больше» («меньше»); что вы не иллюстрируете себе порядок, например, образом числовой прямой. Если бы всего этого предварительно не было, то перечисленный набор аксиом не только не воспринимался бы как определенный итог духовного развития, но, скорее, показался бы по меньшей мере странным и во всяком случае произвольным плодом фантазии.

Мы многое постепенно узнавали о числах, приобрели много навыков и за школьные годы накопили довольно большой материал. Поэтому кажется чудом, что весь он уже заключен в этом сравнительно небольшом списке каких-то банальных на первый взгляд аксиом. [3]

3. Напоминания.

Разумеется, мы не станем здесь вновь получать из аксиом все, что уже знаем об арифметике действительных чисел, а двинемся дальше, раскрывая смысл, место и роль аксиомы полноты (непрерывности), с которой пока еще не сталкивались.

И все же хотя бы перечислим некоторые важные вещи, связанные с действительными числами. Ведь когда-то мы постепенно продвигались от натуральных чисел $\mathbb{N}$ (1, 2, 3, ...) к целым $\mathbb{Z}$ (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...) и затем к рациональным $\mathbb{Q}$ - отношениям m/n целых

[3]Кстати, Г.Вейль, отдавая дань юному гению Э.Галуа "указавшему в 1830 путь"(продемонстрировавшему важность понятия группы), в середине двадцатого века написал: "Быть может, наиболее поразительным фактом из опыта современной математики является то, насколько богаты следствиями эти три аксиомы."(Речь о трех аксиомах группы).

чисел (дробям). Научились их складывать и умножать. Сказали, какое из чисел больше. Числа, которые больше нуля, назвали положительными. Ввели и отрицательные числа, после чего у чисел появились им противоположные, вычитание как сложение с противоположным числом стало выполнимо без ограничений, и т.д.

Куда все это подевалось? Где основа основ — натуральные числа?

Они спрятаны в единице: [4] 1, 1+1, (1+1)+1, ...

a) С натуральными числами связаны самые глубинные аспекты математики. С ними связан и великий познавательный принцип математической индукции, соединяющий в математике конечное с бесконечным. Напомним, что если утверждается, что что-то имеет место при любом натуральном n, т.е. для всего бесконечного множества $\mathbb{N}$, то в силу принципа индукции достаточно проверить, что это верно при $n = 1$ и что если это верно для натурального n, то верно и для $n + 1$.

Это равносильно следующему почти тавтологическому заявлению: если подмножество $\mathrm{M} \subset \mathbb{N}$ натурального рядя чисел таково, что оно содержит 1 и вместе с числом $m \in M$ всегда содержит и число $m + 1$, то $\mathrm{M} = \mathbb{N}$.

Вообще, множество $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если из $x \in E$ следует, что $(x+1) \in E$. Натуральный ряд — это наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу (1).

b) Сложение натуральных чисел не выводит за пределы натуральных чисел. В любом подмножестве натуральных чисел имеется минимальный элемент, т.е. число, которое меньше всех остальных чисел данного множества. Это можно установить принципом индукции.

(В качестве более простого упражнения, докажите, пользуясь принципом индукции, например, следующее неравенство Бернулли, которым мы потом воспользуемся: $(1+\Delta)^n \leq 1+n\Delta$ при $\Delta \geq 0$.)

c) Умножение натуральных чисел тоже не выводит за пределы натуральных чисел, что тоже устанавливается индукцией.

Это позволяет говорить о разложении натурального числа на натуральные множители, о простых числах и делимости, о наименьшем общем кратном, наибольшем общем делителе и т.д.

Центральными тут были два факта:

---

[4]Возможно поэтому один из первопроходцев аксиоматизации (формализации) понятия действительного числа Р.Дедекинд сказал: "Единицу дал Бог, остальное — дело рук человеческих."

основная теорема арифметики, о том, что любое натуральное число допускает единственное разложение на простые множители, причем это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей;

алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел (путем последовательного деления с остатком).

(Проверьте, целые числа p, q взаимно просты, тогда и только тогда, когда найдутся целые a, b такие, что a$p + bq = 1$.)

d) Привычным геометрическим образом, связанным с действительными числами, является числовая прямая. На ней каждая точка отвечает определенному числу. Это число называют координатой точки. Чтобы такое соответствие возникло, достаточно указать точку, отвечающую числу 0, называемую началом координат, и точку, отвечающую числу 1. Отрезок с концами в этих точках называют единичным отрезком. Он служит единицей длины. После того, как единица длины фиксирована, любой другой отрезок получает длину, выраженную некоторым действительным числом, рациональным, если отрезок соизмерим с единичным, и иррациональным в противоположном случае.

Если бы мы имели только рациональные числа, то наша числовая ось оказалась бы дырявой. Дыры были бы на местах, отвечающих точкам с иррациональными координатами. Аксиома полноты требует заполнения этих дыр. Она делает числовую ось непрерывной, связной.

Это обстоятельство потом окажется лежащим в основе многих явлений (теорем). Например, когда вам говорят, что ночью температура была -3^0C, а в полдень 13^0C, то вы не сомневаетесь, что когда-то она была равна нулю, а также любому значению между -3^0C и 13^0C. Без связности (непрерывности) числовой оси это могло быть и не так (удалите для эксперимнта одну точку, например, начало координат).

e) Привычное измерение отрезков посредством какой-то фиксированной единицы длины, кроме многого прочего, предполагает выполненным следующий фундаментальный *принцип Архимеда*: конечным числом шагов любой, даже малой, но фиксированной величины $h > 0$, можно пройти путь больший любой фиксированной длины S. На языке чисел и с некоторым весьма полезным уточнением это выглядит так: если $h > 0$, то для любого действительного числа x найдется единственное целое число k, такое что $kh \leq x < (k+1)h$.

Именно это обстоятельство лежит, если вы помните, и в основе измерения отрезков, и в основе построения любой позиционной системы счисления, т.е. записи чисел в виде конечных или бесконечных дробей. В обиходе чаще всего фигурирует десятичные дроби (основание 10). Для компьютерных дел (где стандартное реле имеет две позиции — включено-выключено) удобнее система записи чисел наборами нулей и единиц. Т.е. в этом случае удобнее двоичная система счисления; основание системы 2.

f) Образ числовой оси или числовой прямой породил следующую геометрическую терминологию. Совокупность действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам а $\leq x \leq b$ обозначают $[a, b]$ и обычно называют *отрезком.* Само число x часто называют точкой этого отрезка, отождествляя понятия точки прямой и ее координаты. В этом же смысле о числе x могут сказать, что оно лежит между а и b. Точки-числа а и b называют концами отрезка $[a, b]$. Если из отрезка удалить концы, т.е. рассмотреть числа x, удовлетворяюшие строгим неравенствам а $< x < b$, то такое множество часто обозначают через $]a, b[$ и называют *интервалом* или открытым интервалом с концами а и b. Если а $< b$, то говорят, что точка (число) а лежит левее точки b, или, что b лежит правее а. Отрезки $[a, b]$, интервалы $]a, b[$, полуинтервалы $]a, b]$, $[a, b[$ объединяют одним термином — *промежитки* числовой прямой. Используя символы $-\infty$ и $+\infty$, сюда добавляют и неограниченные промежутки: $]-\infty, b[$ (где $x < b$), $]-\infty, b]$ (где $x \leq b$), $]a, +\infty[$ (где $a < x$), $[a, +\infty$ (где $a \leq x$), ну а $]-\infty, +\infty[$ — это вся числовая ось.

Окрестностью точки называют любой интервал, содержащий эту точку. Интервал $]x - \delta, x + \delta[$ называют δ-*окрестностью* точки $x \in \mathbb{R}$.

Вводят и *расстояние* $d(x, y)$ между точками $x, y \in \mathbb{R}$, полагая $d(x, y) = |x - y|$, где $|x - y|$ — модуль (абсолютная величина) числа $x - y$.

Мерой или *длиной* любого промежутка I с концами в точках a и b считается величина $|b - a|$, часто обозначаемая как $|I|$.

g) В математике имеется стандартная процедура пополнения любого множества, на котором есть метрика, т.е. определено расстояние между точками (элементами) множества. В применении к множеству $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, наделенных расстоянием $d(x, y) = |x - y|$, она дает множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. Сама эта процедура скопирована как раз с последнего шага постепенного (генетического, а не аксиоматического) построения классической цепочки $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Напомним, что в процессе измерения, например, когда измеряют длину диагонали единичного квадрата, получают не символ $\sqrt{2}$, а последовательность рациональных чисел — конечных десятичных дробей: 1.4 ; 1.41 ; ...; 1.4142135 ; ... Про нее мы обычно говорим, что это *последовательность приближений* измеряемой величины. Замечательная особенность такой последовательности в том, что все ее достаточно далекие члены уже очень мало отличаются друг от друга в смысле введенного расстояния. Например, все члены, идущие после 1.41421, отличаются друг от друга не более, чем на 0.00001. Именно поэтому, говорят, что *абсолютная погрешность* приближения 1.41421 не превосходит $0.00001 = 10^{-5}$. Специальный раздел математики (Методы вычислений) учит, в частности, обращению с приближениями и погрешностями абсолютными и относительными.

Нам же сейчас хочется только отметить, что полученная последовательность приближений подобно указке ведет нас к тому мифическому, что обозначено $\sqrt{2}$.

Не существовавший "иррациональный"объект $\sqrt{2}$ отождествился со специального типа бесконечной последовательностью рациональных чисел. Ее мы мимоходом назвали указкой. В высокой науке такая указка называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши.* Эти последовательности (указки), грубо говоря, и составляют элементы нового множества $\mathbb{R}$. Если сами рациональные числа отождествить с последовательностями, все члены которых рациональны и одинаковы, то станет ясно, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Чтобы $\mathbb{R}$ стало множеством действительных чисел, надо еще ввести на нем операции и порядок, продолжающий операции и порядок, существовавшие на множестве $\mathbb{Q}$. Но это как раз то, что мы делаем, когда вместо самих чисел, используем их приближения, наращивая точность.

Математическое описание всей этой процедуры уже ведет к центральному для анализа понятию *предела.* В терминах этого понятия изложенная конструкция и многое другое в анализе получает адекватное выражение.

4. Свойства действительных чисел, связанные с полнотой (непрерывностью).

Мы уже отметили, что аксиоматика действительных чисел не только не была исходным пунктом их появления, а наоборот, возникла на основе уже накопленного материала.

В еще большей степени это относится к аксиоме полноты, которую часто называют аксиомой Дедекинда, поскольку в его конструкции множества действительных чисел содержание этой аксиомы составляло основную теорему Дедекинда. (Вот вам и демонстрация приема песочных часов, когда все переворачивается с ног на голову.)

Здесь мы остановимся на ряде нужных нам для дальнейшего свойств действительных чисел, связанных с аксиомой полноты (непрерывности).

а) Верхняя (нижняя) грань числового множества.

Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху* (*снизу*), если существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c$ (соответственно, $c \leq x$) для любого $x \in X$. Число c в этом случае называют *верхней* (соответственно, *нижней*) *границей* множества X или также *мажорантой* (*минорантой*) множества X. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным.*

Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху, называется *верхней гранью* или *точной верхней границей* множества X и обозначается $\sup X$ (читается «супремум X»).

Вот формальная запись этого определения:

$(s = \sup X) := \forall x \in X \ ((x \leq s) \land (\forall s' < s \ \exists x' \in X \ (s' < x')))$.

(Напомним, что знак $:=$ или $=:$ используется для равенства по определению; в нем двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.)

Здесь в первой скобке, стоящей справа от определяемого понятия, написано, что s ограничивает X сверху; вторая скобка говорит, что s — минимальное из чисел, обладающих этим свойством. Точнее, вторая скобка утверждает, что любое число, меньшее s, уже не является верхней границей X.

Аналогично вводится понятие *нижней грани* (*точной нижней границы*) множества X как наибольшей из нижних границ множества X: $(i = \inf X) := \forall x \in X \ ((i \leq x) \land (\forall i' > i \ \exists x' \in X \ (x' < i')))$.

(Обозначением $\inf X$ читается «инфимум X».)

Например, если X — это числовой интервал $0 < x < 1$ или любой промежуток с концами $0, 1$, то $\sup X = 1$, а $\inf X = 0$.

Однако ведь не во всяком, даже ограниченном, множестве действительных чисел имеется максимальный или минимальный элемент. Взять хотя бы интервал $0 < x < 1$.

Поэтому принятые определения верхней и нижней граней числового множества нуждаются в аргументации, которую доставляет следующая

Лемма. (принцип верхней грани) *Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.*

Поскольку единственность минимального элемента числового множества, если таковой элемент существует, очевидно следует из свойств отношения порядка (ведь $x \le y$ и $y \le x$ влечет $x = y$), то для доказательства леммы надо лишь убедиться в существовании верхней грани.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – данное подмножество, а $Y \subset \mathbb{R}$ множество мажорант (верхних границ) X. По условию оба эти множества не пустые. Тогда в силу аксиомы полноты существует число $c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти множества, точнее, такое, что $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ (x \le c \le y)$. Число c, таким образом, является мажорантой X и минорантой Y. Как мажоранта X, число c является элементом Y, но как миноранта Y, число c является минимальным элементом множества Y. Итак, $c = \min Y = \sup X$.

Конечно, аналогично доказывается существование и единственность нижней грани у ограниченного снизу числового множества: *Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет и притом единственную нижнюю грань.*

На доказательстве мы не останавливаемся.

Принцип существования верхней (нижней) грани можно было бы принять за аксиому и вывести из него в качестве теоремы аксиому полноты (теорему Дедекинда). Это простое полезное упражнение.

Аксиома полноты или эквивалентный ей принцип верхней грани совсем не безобидные положения. Это будет видно уже на примере их ближайших следствий.

(Более того, их роль в чем-то схожа с ролью пятого постулата Евклида о параллельных, отрицание которого ведет к неевклидовой геометрии. Об этом мы кое-что скажем в заключительном комментарии к этому разделу.)

Некоторые следствия.

— *Множество* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел неограничено сверху.*

В противном случае у него была бы верхняя грань $c \in \mathbb{R}$. Поскольку c — наименьшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbb{N}$ сверху, то найдется натуральное число n, такое что $c - 1 < n$. Но тогда $c < n + 1$, что невозможно, поскольку $n + 1 \in \mathbb{N}$.

— В множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел справедлив принцип Архимеда.

— Для любого положительного числа ε найдется натуральное число n, такое что $0 < 1/n < \varepsilon$.

— В любом, отличном от точки, промежутке действительных чисел имеются рациональные числа.

Доказательство последних трех утверждений теперь уже можно оставить читателю.

b) Вложенные отрезки (Принцип Коши — Кантора).

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность каких-то множеств. Если $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, т.е. каждое следующее множество содержится в предыдущем, то говорят, что имеется последовательность *вложенных* множеств.

Лемма. (принцип вложенных отрезков) *Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.*

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k, длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то c — единственная общая точка всех отрезков.

Условие вложенности отрезков $I_k = [a_k, b_k]$ означает, что

$$a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_1,$$

т.е. $a_m \leq b_n$ при любых значениях m и n. Тогда по аксиоме полноты существует точка $c \in \mathbb{R}$, разделяющая множества A и B левых и правых концов этих отрезков, т.е. $a_m \leq c \leq b_n$. В частности, $a_n \leq c \leq b_n$ при любых значениях $n \in \mathbb{N}$. Но это и значит, что точка c принадлежит всем отрезкам I_n.

Пусть теперь c_1 и c_2 — две точки, обладающие этим свойством. Если они различны и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n$, поэтому $0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n$ и длина каждого отрезка нашей последовательности не может быть меньше положительной величины $c_2 - c_1$. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная.

c) Конечное покрытие (Принцип Бореля — Лебега).

Говорят, что система $S = \{X\}$ множеств X *покрывает* множество Y, если $Y \subset \bigcup\limits_{X \in S} X$, т.е. если любой элемент y множества Y содержится по крайней мере в одном из множеств X системы S.

Подмножество множества $S = \{X\}$ (являющегося системой множеств) будем называть *подсистемой* системы S. Таким образом, подсистема системы множеств сама является системой множеств того же типа.

Лемма. (принцип выделения конечного покрытия) *В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.*

Пусть $S = \{U\}$ — система интервалов U, покрывающая отрезок $[a, b] = I_1$. Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S, то, поделив I_1 пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок, которую мы обозначим через I_2, тоже не допускает конечного покрытия. С отрезком I_2 проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок I_3 и т.д.

Таким образом, возникает последовательность $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S. Поскольку длина отрезка, полученного на n-м шаге, по построению равна $|I_n| = |I_1| \cdot 2^{-n}$, то в последовательности $\{I_n\}$ есть отрезки сколь угодно малой длины (см. следствия леммы о верхней грани). По лемме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам I_n, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $c \in I_1 = [a, b]$, то найдется интервал $]\alpha, \beta[\, = U \in S$ системы S, содержащий точку c, т.е. $\alpha < c < \beta$. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдем в построенной последовательности такой отрезок I_n, что $|I_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$, заключаем, что $I_n \subset U = \,]\alpha, \beta[$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы.

d) Предельная точка (Принцип Больцано — Вейерштрасса).

Напомним, что окрестностью точки $x \in \mathbb{R}$ мы назвали интервал, содержащий эту точку; δ - окрестностью точки x — интервал $]x - \delta, x + \delta[$.

Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества X. Это условие, очевидно, равносильно тому, что в любой окрестности точки p есть по крайней мере одна не совпадающая с p точка множества X. (Проверьте!)

Приведем несколько примеров.

Если $X = \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, то предельной для X является только точка $0 \in \mathbb{R}$.

Для интервала $]a,b[$ предельной является каждая точка отрезка $[a,b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Для множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел предельной является каждая точка $\mathbb{R}$, ибо, как мы знаем, в любом интервале вещественных чисел имеются рациональные числа.

Лемма. (принцип предельной точки)

Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

Пусть X — данное подмножество $\mathbb{R}$. Из определения ограниченности множества X следует, что X содержится в некотором отрезке $[a,b] = I \subset \mathbb{R}$. Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка I является предельной для X.

Если бы это было не так, то каждая точка $x \in I$ имела бы окрестность $U(x)$, в которой либо вообще нет точек множества X, либо их там конечное число. Совокупность $\{U(x)\}$ таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x)$, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), \ldots, U(x_n)$ интервалов, покрывающую отрезок I. Но, поскольку $X \subset I$, эта же система покрывает все множество X. Однако в каждом интервале $U(x_i)$ только конечное число точек множества X, значит, и в их объединении тоже конечное число точек X, т.е. X — конечное множество. Полученное противоречие завершает доказательство.

Упражнение: покажите, что если вместо полного множества $\mathbb{R}$ всех действительных чисел взять только множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а под отрезком, интервалом и окрестностью точки $r \in \mathbb{Q}$ понимать соответствующие подмножества $\mathbb{Q}$, то ни одна из доказанных выше лемм 1-4 не останется в силе.

5. Заключительный комментарий (не все так просто).

а) Аксиоматика.

"Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы замещены другими, лишь бы только не менялись их отношения."Это еще сто лет тому назад писал Пуанкаре (см. «Наука и гипотеза»в книге [1]), а пару тысяч лет назад продемонстрировал Евклид, предприняв формализацию элементарной геометрии.

Сегодня для точного математического выражения указанного обстоятельства имеется специальный термин — *изоморфизм* (точнее, изоморфизм математических объектов или структур).

Во введении мы уже отмечали, что математические законы, подобно таблице умножения, абстрактны и потому применимы к океану конкретных обстоятельств и реализаций. По-видимому, это (хотя не только оно) лежит прямо в основе почти непостижимой эффективности математики.

Вернемся теперь к аксиоматике действительных чисел.

Относительно любой абстрактной системы аксиом сразу же возникают по крайней мере два вопроса.

Во-первых, совместимы ли эти аксиомы, т.е. существует ли множество, удовлетворяющее всем перечисленным условиям. Это вопрос о *непротиворечивости аксиоматики.*

Во-вторых, однозначно ли данная система аксиом определяет математический объект, т.е., как сказали бы логики, *категорична* ли система аксиом. Однозначность в нашем случае надо понимать следующим образом. Если лица A и B, независимо, построили свои модели, к примеру, числовых систем $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$, удовлетворяющие аксиоматике, то между множествами $\mathbb{R}_A$, $\mathbb{R}_B$ можно установить взаимно однозначное соответствие, пусть $f\colon \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}_B$, сохраняющее арифметические операции и отношение порядка, т.е. $f(x+y) = f(x)+f(y), \quad f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y), \quad x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$.

С математической точки зрения $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$ в таком случае являются всего-навсего различными (совершенно равноправными) реализациями (моделями) действительных чисел (например, $\mathbb{R}_A$ — бесконечные десятичные дроби, а $\mathbb{R}_B$ — точки на числовой прямой). Такие реализации называются *изоморфными*, а отображение f — *изоморфизмом.* Результаты математической деятельности относятся, таким образом, не к индивидуальной реализации, а к каждой модели из класса изоморфных моделей данной аксиоматики.

Мы не будем здесь углубляться в вопросы непротиворечивости и категоричности приведенной аксиоматики множества действительных чисел. Ограничимся следующей информацией.

Положительный ответ на вопрос о непротиворечивости аксиоматики всегда носит условный характер. В отношении чисел он выглядит так: исходя из принятой аксиоматики теории множеств, можно построить множество натуральных, затем множество рациональных и, наконец, множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, удовлетворяющее всем перечисленным свойствам.

Вопрос о категоричности системы аксиом действительных чисел имеет положительный ответ, и это простое упражнение.

b) Роль аксиомы непрерывности.

Во всех наших вычислениях (тем более в компьютерных) мы не выходим за пределы множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Рациональные числа удовлетворяют всем аксиомам приведенной аксиоматики действительных чисел, кроме одной аксиомы непрерывности (полноты). Какова ее роль? Рассмотрим это на конкретном примере.

В множестве $\mathbb{Q}(x)$ всех рациональных дробей

$$R_{m,n} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$$

с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ или из $\mathbb{R}$ действуют обычные арифметические операции.

Введем в нем порядок, положив, что $R_{m,n} \succ 0$, если $\frac{a_m}{b_n} > 0$. (При наличии вычитания достаточно научиться сравнивать с нулем.)

Как и в случае $\mathbb{Q}$, легко проверить, что $\mathbb{Q}(x)$ при этом становится упорядоченным полем, удовлетворяя всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы непрерывности.

Но, в отличие от $\mathbb{Q}$, это поле неархимедово. Содержащееся в нем множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел ограничено (например, x мажорирует любую константу). Тут имеются и актуально бесконечно малые: элемент x^{-1} лежит между нулем и любым положительным числом $r \in \mathbb{Q}$.

Это, в частности, показывает, что, казалось бы, непреложный принцип Архимеда сам по себе не следует из аксиом $\mathbb{R}$, минуя аксиому непрерывности или что-то ее заменяющее.

Именно это мы имели в виду, сказав выше, что ситуация аналогична независимости постулата о параллельных в геометрии Евклида.

c) Непрерывность математическая и физическая.

"Разум пользуется своей творческой силой, когда опыт принуждает его к этому."Сказано это было тем же Пуанкаре в той же книге в связи с глубоким анализом понятия измерения, величины и непрерывности.

Позволим себе привести без купюр следующую стимулирующую к размышлению выдержку.

"Например, было замечено, что вес A, равный 10 граммам, и вес B, равный 11 граммам, производят тождественные ощущения, что вес B нельзя отличить от веса C, равного 12 граммам; но что вес A можно легко отличить от веса C. Таким образом, непосредственные результаты опыта могут быть выражены следующими соотношениями:

$$\mathrm{A} = B, \quad B = C, \quad \mathrm{A} < C,$$

которые можно рассматривать как форму физической непрерывности. Эта форма заключает в себе недопустимое разногласие с законом противоречия; необходимость избежать его и заставила нас изобрести идею математической непрерывности."

Есть над чем задуматься!

d) Иное расширение множества рациональных чисел.

Расстояние между рациональными числами можно вводить не только из соображений упорядоченности и физической непрерывности. Иногда его диктует иная структура и логика самого объекта. Ведь рациональные числа — это отношения целых чисел. У целых чисел есть разложение на простые множители. Это арифметическая структура.

Она позволяет ввести иное расстояние в $\mathbb{Q}$.

Выберем простое число p. Любое рациональное число r однозначно записывается в виде $r = p^k \cdot m/n$, где k — целое ($k \in \mathbb{Z}$), а m/n — несократимая дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты с p. Величина p^{-k} называется *p-адической нормой* числа r и обозначается $\|r\|_p$. Расстояние определяется равенством $d_p(r_1, r_2) := \|r_1 - r_2\|_p$.

Можно теперь пополнить множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел по этому расстоянию. Возникает система $\mathbb{Q}_p$ так называемых p-адических чисел и соответствующая ей математика, в том числе и p-адический анализ.

(Между прочим, целые числа $\mathbb{Z}$, как легко проверить, образуют в $\mathbb{Q}_p$ ограниченное множество диаметра 1.)

Основные приложения p-адический анализ нашел в теории чисел, но уже есть попытки использовать его в современной математической физике.

Словом, понятие числа глубоко. Даже, казалось бы, совсем абстрактные алгебраические его расширения неожиданно оказываются весьма полезными. Чего стоят, например, одни комплексные числа!

Наряду с анализом действительным, комплексным и уже упомянутым p-адическим, появились нестандартный анализ (над неархимедовыми полями, где, как и в приведенном выше примере, есть актуально бесконечно малые числа), квантовый анализ (где, наоборот, нет величин, меньших некоторого "планковского"масштаба), суперанализ (рассматривающий функций с коммутирующими и антикоммутирующими переменными). Последний уже активно используется в некоторых новых моделях теоретической физики. Однако базой всему является классический анализ над полем действительных чисел.

e) Число и размерность

Мы говорили, что отвлеченность числа дает ему преимущество относиться к чему угодно конкретному.

Все же следует сказать, что наличие размерности у числового значения физической величины часто дает весьма ценную информацию. Ясно, что если у вас в ответе "два землекопа и две трети"или метры там, где должна быть масса, то вы станете все пересчитывать и проверять.

Есть даже красивая и полезная теория размерности физических величин, которая учит извлекать пользу из того, что вы имеете дело не с абстрактными числами, а с размерными величинами.

Об этом мы постараемся дать представление, когда в нашем распоряжении будет хотя бы минимальный математический аппарат анализа.

f) Число и бесконечность.

Все, что мы делаем, имеет конечное число шагов, хотя почти вся математика пронизана духом бесконечности. Это понятие таинственно. Принцип индукции — один из мостов, по которому эффективно переходят от конечного к бесконечному.

Бесконечности тоже бывают разные. Во всяком случае на базе той аксиоматики действительного числа, которая была приведена выше, можно доказать следующую известную теорему Кантора.

Теорема. *Точки отрезка нельзя взаимно однозначно занумеровать натуральным рядом чисел.*

Если бы это было сделано, то можно было бы поступить так. Взять точку x_1 с номером 1 и в исходном отрезке I взять отрезок I_1, не содержащий x_1. Потом взять точку x_2 и в отрезке I_1 взять отрезок I_2, не содержащий x_2, и т.д. По лемме о вложенных отрезках существует точка, принадлежащая всем отрезкам $I_1, I_2, \ldots$. Но она не может иметь никакого номера $n \in \mathbb{N}$.

g) Литература.

В конце заметим, что тонкие математические, естественнонаучные и философские вопросы понятия числа были предметом размышлений и работ многих ученых. К уже упоминавшимся здесь Дедекинду, Пуанкаре, Вейлю можно было бы добавить и Гильберта, и Лузина. Эта же тема поднималась и в работах более поздних авторов, например, у Рашевского (написавшего, к слову сказать, подробный комментарий к «Основаниям геометрии»Гильберта). Укажем некоторые библиографические данные.

1. *А.Пуанкаре,* О науке. — 2-е изд., стер. — М.: Наука, 1990.

2. *Д.Гильберт,* Основания геометрии. М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.

3. *Г.Вейль,* Континуум. Критическое исследование по основаниям анализа. Пер. Ю.А.Данилова , с. 93-168 в книге:

Математическое мышление, пер. с англ. и нем. Ю.А.Данилова, под ред. Б.В.Бирюкова и А.Н.Паршина. М.: Наука, 1989, 400 с.

Оригинал: *Hermann Weyl,* Das Kontinuum. Veit & Co.,Leipzig, 1918. 2 Auflage, de Gruyter & Co., Berlin, 1932.

4. Дело академика Николая Николаевича Лузина. (Институт истории естествознания и техники им. С.И.Вавилова РАН, Архив Российской Академии Наук) РХГИ, Санкт-Петербург, 1999.

5. *П.К.Рашевский,* О догмате натурального ряда. Успехи Математических Наук, **28**, 4, 243- 246, 1973.

6. *В.А.Успенский,* Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987.

7. *А.А.Кириллов,* Что такое число? М.: Наука, 1993.

8. *А.Н.Паршин,* Путь (математика и другие миры). М.: Добросвет, 2002.